

Б.М.Верников
М.В.Волков

ПОЧТИ ЦЕПНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ КОЛЕЦ

Одной из важнейших задач теории многообразий является изучение структур подмногообразий. В большинстве работ, связанных с этой проблематикой, рассматриваются свойства структур подмногообразий тех или иных конкретных многообразий. В последнее время получили распространение и в некотором смысле двойственный подход, когда изучаются многообразия с различными ограничениями на структуру подмногообразий (см. обзор [1]). Естественно, что одним из первых были рассмотрены многообразия, подмногообразия которых образуют цепь. Следуя В.А.Артамонову, такие многообразия мы будем называть цепными. Многообразие назовем почти цепным, если оно не является цепным, но любое его особое подмногообразие — цепное.

В настоящей работе изучаются почти цепные многообразия альтернативных колец. Мы показываем, что произвольное нецепное многообразие содержит почти цепное подмногообразие. Таким образом, изучение нецепных многообразий естественно начать с описания почти цепных многообразий. Несложные теоретико-структурные соображения позволяют установить, что каждое почти цепное многообразие порождается двумя цепными многообразиями, пересечение которых максимально в каждом из них. Этот результат сводит задачу описания почти цепных многообразий к перебору всех пар цепных многообразий с таким свойством. Опираясь на результаты В.А.Артамонова [5], описавшего цепные многообразия альтернативных алгебр над произвольными нетерновыми коммутативно-ассоциативными кольцами K с 1, мы осуществляем требуемый перебор и описываем все почти цепные многообразия альтернативных колец. Отметим, что распространение полученных результатов на более общий случай многообразий альтернативных K -алгебр не вызывает принципиальных затруднений, хотя и связано с усложнением вычислений.

Перечислим основные обозначения. Если Σ — некоторая система тождеств, то через $[\Sigma]$ будем обозначаться многообразие, заданное этой системой. Многообразие, порожденное кольцом R , обозначается символом $\text{пол } R$. Композит многообразий

и M , т.е. наименьшее многообразие, содержащее и M , и N будет обозначаться через $M \vee N$. Относительно операций пересечения и взятия композита множество подмногообразий данного многообразия M является структурой, которую мы обозначим символом (M) . Словом также, что запись $\alpha^1 \alpha^2 \dots \alpha^n = 0$ означает, что произведение $\alpha^1 \alpha^2 \dots \alpha^n$ равно нулю при любой расстановке скобок.

Иногда I . Пусть M — локально нильпотентное многообразие колец. Если M — нецепное многообразие, то M содержит нильпотентное почти цепное подмногообразие.

Доказательство. Пусть M и N — несравнимые подмногообразия многообразия M . Так как они порождаются нильпотентными кольцами, существуют нильпотентные кольца $N^1 \subseteq N^2 \subseteq N^3 \subseteq \dots$ и $N^1 \subseteq N^2 \subseteq N^3 \subseteq \dots$. Легко видеть, что многообразия N^1 и N^2 не сравнимы, и, стало быть, $N^1 \wedge N^2 = N^1$. Как хорошо известно, подмногообразие многообразия M — нецепное нильпотентное, если оно удовлетворяет условию $N^1 \wedge N^2 = N^1$. Таким образом, в M выполнено условие минимальности. Так как множество нецепных подмногообразий многообразия не пусто, оно содержит минимальный элемент, т.е. почти цепное подмногообразие. Лемма доказана.

Пусть d — простое число. Обозначим через F^d поле из d элементов, а через Z^d — кольцо с нулевым умножением из d элементов. Хорошо известно (см. [9]), что многообразия F^d и Z^d и только они являются атомами структуры всех многообразий колец с ассоциативными степенями. Следуя Сан-Дараману [7], назовем многообразие колец M предполным, если в структуре (M) имеется ровно один атом. Предположим, что многообразие M называется предполным, если единственным атомом в (M) является F^d (соответственно, Z^d). Пусть M — нецепное многообразие, то M содержит почти цепное подмногообразие.

Доказательство. Если многообразие M содержит два различных атома F^d и Z^d , то оно содержит и многообразие $F^d \vee Z^d$, которое, как легко видеть, является почти цепным. Поэтому можно считать M предполным многообразием. Так как M — многообразие колец с ассоциативными степенями, оно либо F^d -предполное,

либо $\mathcal{Z}_p$ -предполное. В первом случае, как показано в [1], $\mathcal{M}$ порождается конечным числом конечных полей. Тогда структура $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ конечна (см., напр., [2]), и среди нецепных подмногообразий многообразия $\mathcal{M}$ существует минимальное.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ есть $\mathcal{Z}_p$ -предполное многообразие. Как показано в [7], в $\mathcal{M}$ выполнено тождество $x^p = 0$ для некоторого p . По теореме Широва [4, с. 148] $\mathcal{M}$ - локально нильпотентное многообразие, и мы можем воспользоваться леммой 1. Предложение доказано.

Отметим, что предложение 1 можно вывести из конечной базисности цепных многообразий альтернативных колец стандартным применением леммы Цорна. На наш взгляд, представляет интерес и доказательство, не использующее никакой дополнительной информации о цепных многообразиях.

Следующая лемма справедлива (при соответствующей переформулировке) для произвольных дедекндовских структур. Мы формулируем и доказываем ее только для структур многообразий колец, так как именно этот случай и используется в дальнейшем. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ - два многообразия, то говорят, что $\mathcal{M}$ покрывает $\mathcal{N}$, если $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$ и для любого многообразия $\mathcal{K}$ из того, что $\mathcal{M} \supset \mathcal{K} \supset \mathcal{N}$, следует, что $\mathcal{K} = \mathcal{N}$.

Л е м м а 2. Пусть $\mathcal{M}$ - почти цепное многообразие колец. Тогда $\mathcal{M} = \mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2$, где $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ - цепные многообразия, покрывающие $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ - два несравнимых подмногообразия многообразия $\mathcal{M}$. Ясно, что многообразия $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ - цепные. Так как многообразие $\mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2$ нецепное, оно совпадает с $\mathcal{M}$. Проверим, что многообразие $\mathcal{M}$ покрывает $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$. Пусть $\mathcal{K}$ таково, что $\mathcal{M} \supset \mathcal{K} \supset \mathcal{N}_1$. Ясно, что $\mathcal{N}_2 \vee \mathcal{K} = \mathcal{N}_2 \vee \mathcal{N}_1 = \mathcal{M}$. Далее, многообразия $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}_2$ сравнимы, так как $\mathcal{K}$ - цепное многообразие. Следовательно $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}_2 \supset \mathcal{N}_1$ невозможно, поскольку многообразия $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ выбраны несравнимыми; следовательно $\mathcal{N}_1 \supset \mathcal{K} \cap \mathcal{N}_2$, откуда $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$. В силу дедекндовости структуры $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ мы получаем $\mathcal{K} = \mathcal{N}_1$. Итак, $\mathcal{M}$ покрывает $\mathcal{N}_1$, и аналогично $\mathcal{M}$ покрывает $\mathcal{N}_2$. Но для дедекндовой структуры это равносильно тому, что и $\mathcal{N}_1$, и $\mathcal{N}_2$ покрывают $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$. Лемма доказана.

Будем для краткости называть пару цепных многообразий

$(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ отмеченной, если $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ покрывают $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$. Лемма 1 устанавливает соответствие между почти цепными многообразиями и отмеченными парами. Хотя, как будет видно из дальнейшего, это соответствие не является взаимно-однозначным, оно в определенном смысле сводит задачу описания почти цепных многообразий к перебору всех отмеченных пар.

Нам понадобятся описание цепных многообразий альтернативных колец. Будем для краткости опускать тождества альтернативности в записи систем тождеств.

П р е д л о ж е н и е 2. Следующие многообразия и только они являются цепными многообразиями альтернативных колец (p - простое число):

$$\mathcal{O} = [x = 0];$$

$$\mathcal{O}_{p^k} = [xy = 0, \quad p^k x = 0], \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\mathcal{L}_p = [x^p = px = 0, \quad xy = yx, \quad (xy)x = x(yx)];$$

$$\mathcal{L}_p^z = [x^p = px = 0, \quad xy = yx, \quad (xy)x = x(yx), \quad x_1 x_2 \dots x_z = 0], \quad z = 3, 4, \dots;$$

$$\mathcal{U}_p = [px = 0, \quad xy = yx, \quad (xy)x = x(yx), \quad x_1 x_2, \dots, x_{p+1} = 0];$$

$$\mathcal{L}_{p^2}^a = [p^2 x = 0, \quad xy = yx, \quad (xy)x = x(yx), \quad x_1 x_2 \dots x_{p+1} = 0, \quad x^p = \alpha p x], \quad \alpha = 1, \dots, p-1;$$

$$\mathcal{K}_p^z = [x^2 = px = 0, \quad x_1 x_2 \dots x_z = 0], \quad p > 2, \quad z = 3, 4;$$

$$\mathcal{Y}_3 = [3x = x^3 = (xy)(xt) = 0, \quad xy = yx];$$

$$\mathcal{Y}_3^z = [3x = x^3 = (xy)(xt) = 0, \quad xy = yx, \quad x_1 x_2 \dots x_z = 0], \quad z = 4, 5, \dots;$$

$$\mathcal{Y}_3^{z+1} = [3x = x^3 = (xy)(xt) = 0, \quad xy = yx, \quad (\dots (yx_1)x_2 \dots) x_z + \\ + (-1)^{z+1} (\dots (yx_2)x_3 \dots) x_1 + \dots + (-1)^{(z+1)(z-1)} (\dots (yx_z)x_1 \dots) x_{z-1} = 0], \\ z = 5, 8, 11, \dots;$$

$$\mathcal{K}_2 = [2x = 0, \quad xyx = 0];$$

$$\mathcal{K}_2[\tau] = [2x = 0, \quad (xy)x = x(yx), \quad (xy)x + (yx)x + (x\tau)x = 0,$$

$$(x_1 x_2) x_3 = (x_{1\tau} x_{2\tau}) x_{3\tau}],$$

τ - транспозиция из S_3 ;

атомов ни $\mathcal{N}_1$, ни $\mathcal{N}_2$ не содержат. Из теоремы I работы Сен-дарамана [8] вытекает, что тогда $\mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2$ также содержит единственный атом. Если бы многообразия $\mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2$ не было почти цепным, оно бы содержало почти цепное многообразие с меньшей высотой соответствующей ему отмеченной пары, но каждое такое многообразие есть по предположению композит двух атомов. Поэтому и в случае $h(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) = 2$ многообразие $\mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2$ — почти цепное. Лемма доказана.

Укажем теперь все почти цепные многообразия, отвечающие отмеченным парам $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ с $h(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) \leq 2$.

Приведем и в 3. Следующие многообразия и только они являются почти цепными многообразиями алгебраических колец высоты 2 (p, q — простые числа, $p \neq q$):

$$\mathcal{O}_{pq} = \mathcal{O}_p \vee \mathcal{O}_q = [pq, x=0, xy=0],$$

$$\mathcal{Y}_{pq} = \mathcal{Y}_p \vee \mathcal{Y}_q = [pq, x=0, p(x^q - x)=0, q(x^p - x)=0, xy=xyx, (xy)z=x(yz)],$$

$$\mathcal{Z}_{pq} = \mathcal{O}_p \vee \mathcal{Y}_q = [pq, x=0, qxy=0, p(x^q - x)=0, xy=xyx, (xy)z=x(yz)],$$

$$\mathcal{Z}_p = \mathcal{O}_p \vee \mathcal{Y}_p = [px=0, xy=xyx, (xy)z=x(yz), (xy)^p=xy].$$

Доказательство. В силу лемм 2 и 3 нам достаточно проверить, что многообразия $\mathcal{O}_{pq}, \mathcal{Y}_{pq}, \mathcal{Z}_{pq}$ и $\mathcal{Z}_p$ действительно задаются указанными системами тождеств. Пусть $\mathcal{M}$ — многообразие одного из первых трех типов, R — произвольное кольцо из $\mathcal{M}$. Рассмотрим идеалы $P = \{x \in R, qx=0\}$ и $Q = \{x \in R, px=0\}$ кольца R . Ясно, что $R = P \times Q$, причем в зависимости от вида $\mathcal{M}$ кольцо P принадлежит либо $\mathcal{O}_p$, либо $\mathcal{Y}_p$, а кольцо Q — либо $\mathcal{O}_q$, либо $\mathcal{Y}_q$. Таким образом, $\mathcal{M}$ содержится в соответствующем композите. Обратное включение очевидно.

Разберем оставшийся случай. Пусть $\mathcal{M} = [px=0, xy=xyx, (xy)z=x(yz), (xy)^p=xy]$, а R — произвольное кольцо из $\mathcal{M}$. Рассмотрим в R подмножество $S = \{x \in R, x = x^p\}$. В силу коммутативности и тождества $px=0$ разность двух элементов из S снова принадлежит S . Кроме того, для любых $x, y \in R$ их произведение xy лежит в S , в частности S — идеал в R . Пусть $\mathcal{N}$ — нильрадикал кольца R .

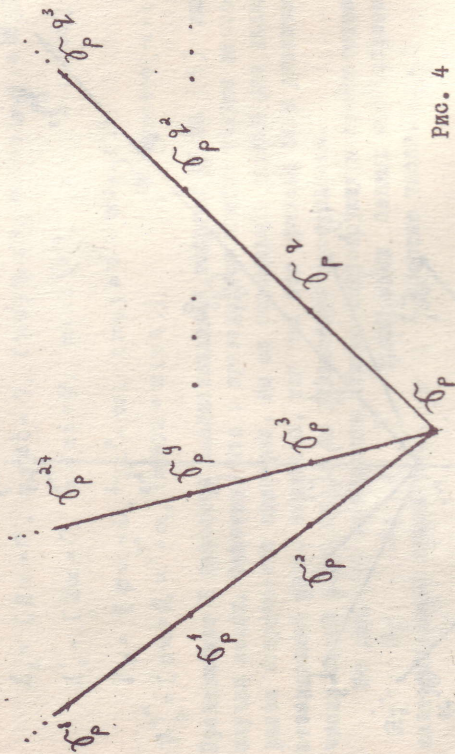


Рис. 4

Нетрудно показать (это видно и из рис. I-4), что каждая отмеченная пара состоит из многообразий, структура подмногообразий которых конечна. Определим высоту $h(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ отмеченной пары $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ как длину цепи $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ (или, что то же самое, как длину цепи $\mathcal{L}(\mathcal{N}_2)$). Из рис. I-4 видно, что возможны лишь следующие значения высот отмеченных пар: 1, 2, $p+1$ (для $\mathcal{Z}_p$ -предполных многообразий) и 5 (для $\mathcal{Z}_2$ -предполных многообразий). Если $\mathcal{M}$ — почти цепное многообразие, то его высотой $h(\mathcal{M})$ назовем число, на единицу больше высоты любой отмеченной ему отмеченной пары. Корректность такого определения очевидна.

Л е м м а 3. Если высота отмеченной пары $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ не превосходит 2, то многообразие $\mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2$ почти цепное.

Доказательство. Если $h(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) = 1$, то многообразия $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ являются атомами структуры всех многообразий колец, и каждое собственное подмногообразие многообразия $\mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2$ также является атомом. Поэтому $\mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2$ — почти цепное многообразие. Если $h(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) = 2$, то $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ — атом, и других

Тогда, очевидно, $N \cap S = O$. Далее, любой элемент $x \in R$ представим в виде: $x = (x - x^p) + x^p$, но $x^p \in S$, а $x - x^p \in N$, так как $(x - x^p)^p = x^p - (x^p)^p = x^p - x^p = O$.

Итак, $R = N \times S$. При этом $S \in \mathcal{L}_p$, а $N \cong R/S$ является кольцом с нулевым умножением и лежит в $\mathcal{O}_p$. Мы видим, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}_p$, а обратное включение очевидно, так как тождества, задающие $\mathcal{M}$, выполнены и в $\mathcal{L}_p$, и в $\mathcal{O}_p$. Предложение доказано.

Многообразия, описанные в предложении 3, являются почти минимальными в том смысле, что каждое их собственное подмногообразие — атом. Описание таких многообразий анонсировано А. Мекем в [3]. Заметим, что для многообразия $\mathcal{L}_p$ в [3] указана значительно более сложная система тождеств.

Предложение 4. Следующие многообразия и только они являются почти цепными многообразиями альтернативных колец высоты 3 (p, q, z — простые числа, $q \neq z$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p^{qz} &= \mathcal{L}_p^q \vee \mathcal{L}_p^z = [px = 0, (xy)z = x(yz), x^{qz} = x]; \\ \mathcal{L}_{p^2}^3 &= \mathcal{O}_p^2 \vee \mathcal{L}_p^3 = [p^2x = 0, pxy = 0, xyz = 0, xy = yx]; \\ \mathcal{M}_p^3 &= \mathcal{L}_p^q \vee \mathcal{L}_p^z = [px = 0, xyz = 0], \quad p > 2; \\ \mathcal{K}_{p^2}^3 &= \mathcal{L}_p^3 \vee \mathcal{O}_p^2 = [p^2x = 0, pxy = 0, x^2 = 0, (xy)z = x(yz)], \quad p > 2. \end{aligned}$$

Доказательство. Как и в предложении 3, достаточно проверить, что многообразия $\mathcal{L}_p^{qz}, \mathcal{L}_{p^2}^3, \mathcal{M}_p^3$ и $\mathcal{K}_{p^2}^3$ действительно содержатся в нем конечными полями. Очевидно, что тождества $x^{p^2} = x$ удовлетворяют только поля $\mathcal{GF}(p)$, $\mathcal{GF}(p^q)$ и $\mathcal{GF}(p^z)$. Но первые два поля лежат в многообразии $\mathcal{L}_p^q$, а третье — в $\mathcal{L}_p^z$. Поэтому $\mathcal{M} = \mathcal{L}_p^q \vee \mathcal{L}_p^z$. Многообразия $\mathcal{L}_{p^2}^3, \mathcal{M}_p^3$ и $\mathcal{K}_{p^2}^3$ нильпотентны индекса 3. Это позволяет найти базис их тождеств с помощью несложного перебора. Проделаем его лишь для одного типичного случая. Очевидно, что тождества $p^2x = 0, pxy = 0, x^2 = 0, (xy)z = x(yz)$

$= x(yz)$ выполнены в многообразии $\mathcal{K}_{p^2}^3 = \mathcal{L}_p^3 \vee \mathcal{O}_p^2$ ($p > 2$). С другой стороны, произвольное тождество, выполненное в $\mathcal{K}_{p^2}^3$, в силу нильпотентности индекса 3 и антикоммутативности может быть приведено к виду

$$nxy = 0 \quad (1)$$

либо

$$m = 0 \quad (2)$$

При этом n делится на p , так как (1) должно выполняться в многообразии $\mathcal{K}_{p^2}^3$, а m делится на p^2 , так как (2) выполнено в $\mathcal{O}_p^2$. Но тогда (1) следует из $pxy = 0$, а (2) — из $p^2x = 0$. Предложение доказано.

Аналог леммы 3 для отмеченных пар высоты 3 не имеет места, как показывает следующая

Лемма 4. Пусть $(\mathcal{L}_{p^2}^3, \mathcal{M})$ — отмеченная пара цепных многообразий ассоциативных колец. Тогда многообразие $\mathcal{L}_{p^2}^3 \vee \mathcal{M}$ не является почти цепным.

Доказательство. Рассматривая все многообразия $\mathcal{M}$, образующие вместе с многообразием $\mathcal{L}_{p^2}^3$ отмеченную пару, можно убедиться, что в каждом из них справедливы тождества

$$p^2x = 0, \quad pxy = 0, \quad xy = yx, \quad x^{p+1} = 0. \quad (3)$$

Так как тождества (3) выполнены и в $\mathcal{L}_{p^2}^3$, они выполняются в многообразии $\mathcal{M} = \mathcal{M} \vee \mathcal{L}_{p^2}^3$. Покажем теперь, что многообразие $\mathcal{M}$ содержит многообразие $\mathcal{O}_{p^2}^2$. Этого достаточно для доказательства леммы, так как многообразие $\mathcal{M}$, очевидно, содержит несравнимое с $\mathcal{O}_{p^2}^2$ многообразие $\mathcal{L}_{p^2}^3$ и не равно $\mathcal{L}_{p^2}^3 = \mathcal{L}_p^3 \vee \mathcal{O}_p^2$.

Предположим, что $\mathcal{O}_{p^2}^2 \not\subseteq \mathcal{M}$. Тогда многообразие $\mathcal{M} \cap [xy = 0]$ строго содержится в $\mathcal{O}_{p^2}^2$ и, следовательно, удовлетворяет тождеству $px = 0$. Это означает, что в свободном в $\mathcal{M}$ кольце Γ с одним образующим x элемент px принадлежит идеалу Γ^2 . Отсюда в кольце Γ выполняется соотношение:

$$px = \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_k x^k, \quad (4)$$

которое будет тождеством многообразия $\mathcal{M}$. В силу тождества (3) можно считать, что $k \leq p$, а $0 \leq \alpha_2, \dots, \alpha_p < p$. Если все коэффициенты α_i равны нулю, то в $\mathcal{M}$ выполнено тождество $px = 0$. Это невозможно, так как $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}_{p^2}$. Пусть теперь ℓ таково, что

$$\alpha_\ell \neq 0, \quad \alpha_2 = \dots = \alpha_{\ell-1} = 0.$$

Если $\ell < p$, то, умножая тождество (4) на $x^{p-\ell}$, мы в силу (3) получаем $x^p = 0$, что снова противоречит включению $\mathcal{M} \cong \mathcal{L}_{p^2}$.

Пусть, наконец, $\ell = p$, т.е. (4) имеет вид $px = \alpha_p x^p$, что равносильно $x^p = \beta px$ для некоторого β . Это тождество должно выполняться и в многообразии $\mathcal{L}_{p^2}$, откуда ясно, что $\alpha = \beta$. Но тогда $\mathcal{M} = \mathcal{L}_{p^2}$, что невозможно. Лемма доказана.

Предложение 5. Многообразие

$$\mathcal{U}_p^{p+2} = \mathcal{U}_p \vee \mathcal{L}_p^{p+2}, \quad [px = 0, \quad xy = 0, \quad (xy)z = \alpha(yz), \quad x_1 \dots x_{p-2} = 0]$$

является единственным ассоциативным почти цепным многообразием высоты $p+2$.

Доказательство. Из леммы 4 вытекает, что других ассоциативных почти цепных многообразий высоты $p+2$ нет. Проверим, что многообразие $\mathcal{U}_p^{p+2}$ — почти цепное. В противном случае оно содержало бы почти цепное подмногообразие меньшей высоты. Все такие многообразия описаны в предложениях 3 и 4. Почти цепных подмногообразий высоты 2 в $\mathcal{U}_p^{p+2}$ нет, так как оно содержит только один атом. Многообразия $\mathcal{K}_p^3$ и $\mathcal{M}_p^3$ не лежат в $\mathcal{U}_p^{p+2}$ в силу их некоммутативности, а многообразие $\mathcal{L}_p^3$ не удовлетворяет тождеству $px = 0$. Наконец, многообразие $\mathcal{Y}_p^3$ не является nil-многообразием и также не может быть подмногообразием многообразия $\mathcal{U}_p^{p+2}$.

Теперь нам остается вычислить базис тождеств многообразия $\mathcal{U}_p^{p+2}$. Ясно, что тождества, указанные в формулировке предложения, справедливы в $\mathcal{U}_p^{p+2}$. Рассмотрим произвольное тождество, выполненное в этом многообразии. В силу коммутативности и nilпотентности индекса $p+2$ оно может быть приведено к одному из следующих двух видов:

$$x^k = 0, \quad (5)$$

$$(6)$$

$$0, \alpha_1, \dots, \alpha_m + \beta \alpha_1^{p_1} \dots \alpha_m^{p_m} + \dots = 0,$$

где $0 < \alpha, \beta, \dots < p, m \geq 2, k, \sum_{i=1}^m \alpha_i, \sum_{i=1}^m \beta_i, \dots \leq p+1$.

Так как первое тождество должно выполняться в многообразии $\mathcal{U}_p$, имеем $k = p+1$. Но тогда (5) следует из тождества $xy = 0$. Во втором случае в силу тождества $xy = 0$ можно считать, что $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m, \dots < p$. Линеаризуя (6) по всем переменным достаточное число раз, мы выведем из него тождество $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = 0$, где $k \leq p+1$. Но такое соотношение не может выполняться в многообразии $\mathcal{L}_p^{p+2}$, следовательно, (6) не выполнено в $\mathcal{U}_p^{p+2}$. Предложение доказано.

Из рис. 3 видно, что мы рассмотрели все отмеченные пары $\mathcal{Z}_q$ — предполных многообразий ($q > 3$). Поэтому остается завершить описание почти цепных многообразий характеристик 3 и 2. **Предложение 6.** Следующие многообразия и только они являются неассоциативными почти цепными многообразиями альтернативных колец характеристик 3:

$$\mathcal{Y}_3^\alpha = \mathcal{Y}_3 \vee \mathcal{L}_3^\alpha = [9x = 0, \quad xyzt = 0, \quad x^3 = 3\alpha x, \quad xy = yx], \quad \alpha = 1, 2;$$

$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{L}_3 \vee \mathcal{Y}_3^4 = [3x = 0, \quad xyztu = 0, \quad x^3 = 0, \quad (xy)z)u = ((xy)u)z =$$

$$= (xz)u) = (xy)(zt) = x(yzt), \quad xy = yx];$$

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{U}_3 \vee \mathcal{Y}_3^4 = [3x = 0, \quad xyzt = 0, \quad xy = yx, \quad (xy)z + (yz)x + (zx)y = 0]$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что других почти цепных неассоциативных многообразий характеристик 3 быть не может, так как мы выписали композиции всех отмеченных пар, содержащих неассоциативное многообразие характеристик 3. Все эти многообразия имеют высоту 5. То, что многообразия $\mathcal{Y}_3^\alpha, \mathcal{X}_3, \mathcal{M}_3$ — почти цепные, доказывается аналогично соответствующим рассуждениям предложения 5. По аналогии с предложением 5 можно проверить, что и многообразие $\mathcal{Y}_3^\alpha$ не содержит почти цепных многообразий высоты 2 и многообразий $\mathcal{Y}_3^{\alpha_2}, \mathcal{K}_3, \mathcal{Z}_3$. Остается до-

казать, что оно не содержит многообразия $\mathcal{L}_3$. Для этого заметим, что многообразие $\mathcal{G}_3^\alpha$ удовлетворяет тождеству $\alpha^3 = 3\alpha\alpha$. Если бы $\mathcal{G}_3^\alpha \ni \mathcal{L}_3$, то указанное тождество выполнялось бы и в $\mathcal{L}_3$. Но вместе с выполненным в нем тождеством $\alpha\alpha\alpha = 0$ это дает $3\alpha\alpha = 0$, что невозможно.

Теперь мы должны проверить, что многообразия $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{H}_3$ и $\mathcal{G}_3^\alpha$ задаются указанными системами тождеств. Прежде всего заметим, что каждая из них влечет тождество

$$(\alpha\alpha)\alpha + (\alpha\alpha)\alpha + (\alpha\alpha)\alpha = 0. \quad (7)$$

Действительно, в первую из этих систем (7) просто входит, а из остальных вытекает, если пролинеаризовать, соответственно, тождества $\alpha^3 = 0$ и $\alpha^3 = 3\alpha\alpha$ и воспользоваться коммутативностью. Пусть теперь $\mathcal{L} = 0$ — произвольное тождество, выполненное в $\mathcal{M}_3$; покажем, что оно следует из тождеств $3\alpha = 0$, $\alpha\alpha\alpha = 0$, $\alpha\alpha = \alpha\alpha$ и (7). Легко видеть, что тождество $\mathcal{L} = 0$ можно считать однородным. Случай, когда его степень равна 1 или 2, очевиден. Если $\mathcal{L}$ имеет вид $\alpha^2\alpha + \beta\alpha\alpha^2$, то линеаризуя тождество $\mathcal{L} = 0$ по α получим $2\alpha(\alpha\alpha)\alpha = 0$. Поэтому тождества такого вида не могут выполняться в $\mathcal{G}_3^\alpha \vee \mathcal{H}_3$. Остается случай, когда $\mathcal{L}$ — полилинейный многочлен степени 3. С помощью коммутативности и (7) тождество $\mathcal{L} = 0$ приводится к виду

$$\alpha(\alpha\alpha)\alpha = \beta\alpha(\alpha\alpha). \quad (8)$$

Если коэффициенты тождества (8) отличны от нуля, то оно влечет либо ассоциативность (если $\alpha = \beta$), либо нильпотентность индекса 3 (если $\alpha \neq \beta$). Ни одно из этих тождеств не может выполняться в $\mathcal{G}_3^\alpha \vee \mathcal{H}_3$, следовательно $\alpha = \beta = 0$ и тождество $\mathcal{L} = 0$ вытекает из коммутативности и (7).

Аналогично находится базис тождеств многообразия $\mathcal{M}_3$. Отличие состоит лишь в том, что необходимо рассмотреть случай, когда степень $\mathcal{L}$ равна 4. Тождество $\mathcal{L} = 0$ можно считать полилинейным. Но из тождеств $((\alpha\alpha)\alpha)\alpha = ((\alpha\alpha)\alpha)\alpha = (\alpha\alpha)(\alpha\alpha) = \alpha(\alpha\alpha)\alpha$ и коммутативности вытекает равенство между собой всех полилинейных (неассоциативных) одночленов от букв α , α , α , α . Поэтому тождество $\mathcal{L} = 0$ приво-

дится к виду $\alpha((\alpha\alpha)\alpha)\alpha = 0$. Если $\alpha \neq 0$, то такое тождество не выполняется в $\mathcal{L}_3$. Поэтому $\mathcal{L} = 0$ является следствием указанной системы тождеств.

Рассмотрим, наконец, многообразие $\mathcal{G}_3^\alpha$ и докажем, что любое его тождество $\mathcal{L} = 0$ следует из тождеств $3\alpha = 0$, $\alpha\alpha\alpha = 0$, $\alpha^3 = 3\alpha\alpha$, $\alpha\alpha = \alpha\alpha$. Если $\mathcal{L}$ — неоднородный многочлен, то оно имеет вид

$$\beta\alpha + \gamma\alpha^2 + \delta\alpha^3 = 0 \quad (9)$$

либо

$$\beta\alpha\alpha + \gamma\alpha^2\alpha = 0 \quad (10)$$

Заменяя в (9) α на $-\alpha$, получим $-\beta\alpha + \gamma\alpha^2 - \delta\alpha^3 = 0$. Складывая это тождество с (9), получаем $2\gamma\alpha^2 = 0$. Это тождество при $\gamma \neq 0$ не выполнено в $\mathcal{G}_3^\alpha$. Следовательно, (9) имеет вид $\beta\alpha + \delta\alpha^3 = 0$. Так как $3\alpha = 0$ и $3\alpha^3 = 0$, можно считать, что $\delta = 1$, а $0 < \beta < 9$. Сравнивая тождество $\beta\alpha + \alpha^3 = 0$ с тождеством $-3\alpha\alpha + \alpha^3 = 0$, мы без труда убеждаемся в том, что первое из них может выполняться в $\mathcal{L}_3$ лишь в том случае, когда $\beta = -3\alpha$. Итак, тождество (9) вытекает из тождеств $3\alpha = 0$, $\alpha^3 = 3\alpha\alpha$. Что касается тождества (10), то линеаризуя его по α , мы с учетом коммутативности и тождества $3\alpha = 0$ получаем $\gamma(\alpha\alpha)\alpha = 0$. Такое тождество может выполняться в $\mathcal{G}_3^\alpha$ только при $\gamma = 0$, а в этом случае и $\beta = 0$, и тождество (10) тривиально.

Если же тождество $\mathcal{L} = 0$ однородно, то, опираясь на тождество (7), мы можем рассуждать так же, как при рассмотрении многообразия $\mathcal{M}_3$. Предложение доказано.

Нам осталось рассмотреть 10 отмеченных пар высоты 5 цепных многообразий характеристики 2.

Л е м м а 5. Многообразие $\mathcal{L}_2 \vee \mathcal{L}_2'$ не является почти цепным.

Доказательство. Рассмотрим 14-мерное пространство R над полем $\mathbb{F}(2)$ с базисом $\alpha_i, \beta_{ij}, c, d$ ($i, j = 1, 2, 3$). Определением в R умножения, полагая $\alpha_i\alpha_j = \beta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), $\alpha_i\beta_{jk} = c$, $\beta_{jk}\alpha_i = d$ (i, j, k попарно различны), а остальные произведения базисных элементов равными 0

Рассмотрим в получившемся кольце подмножество $C = \{0, c\}$. Ясно, что C — идеал в R и кольцо R/C принадлежит $\mathcal{L}'_2$. Аналогично $R/D \in \mathcal{L}'_2$, где $D = \{0, d\}$. Так как $C \cap D = 0$, и кольцо R , будучи подпространством произведения колец R/C и R/D , принадлежит многообразию $\mathcal{L}_2 \vee \mathcal{L}'_2$. Рассмотрим теперь подпространство I , порожденное элементами $c+d$, $b_k + b_l$. Легко видеть, что I также является идеалом в R и кольцо $\bar{R} = R/I$ коммутативно, ассоциативно и удовлетворяет тождеству $x^2y = 0$. Заметим, что индекс nilпотентности кольца $\bar{R}$ строго больше 3, так как, например, произведение образов элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ не равно нулю в $\bar{R}$. Итак, кольцо $\bar{R}$ принадлежит многообразию $\mathcal{V}_2' \cap (\mathcal{L}_2 \vee \mathcal{L}'_2) = \mathcal{L}$. Если $\mathcal{V}_2' \supset \mathcal{L}$, то из очевидного включения $\mathcal{L} \cong k_2 \cap \mathcal{V}_2' = \mathcal{V}_2$ мы получаем, что $\mathcal{V}_2' \cap \mathcal{L}$ совпадает с $\mathcal{V}_2$ и, следовательно, удовлетворяет тождеству $xyx = 0$. Это противоречит тому, что $\bar{R} \in \mathcal{L}$. Итак, $\mathcal{V}_2' = \mathcal{L}$, откуда $\mathcal{V}_2' \subseteq \mathcal{L}_2 \vee \mathcal{L}'_2$. Остается заметить, что последнее включение строгое и что многообразие $\mathcal{V}_2'$ не является цепным. Лемма доказана.

Предложено 7. Следующие многообразия и только они являются почти цепными многообразиями альтернативных колец характеристики 2 и высоты 6:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= k_2[(12)] \vee k_2[(13)] = k_2[(12)] \vee k_2[(23)] = k_2[(13)] \vee k_2[(23)] = \\ &= [2x = 0, \quad xyxz = 0, \quad (xy)z = (xz)x = 0, \quad (xy)z = x(yz)]; \\ \mathcal{N}_2[\tau] &= k_2[\tau] \vee \mathcal{L}_2 = [2x = 0, \quad xyz = 0, \quad (xy)z = (xz)x = 0, \\ &\quad (xy)z = (xz)x = 0]; \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2) x_3 = (x_1 x_2) x_3;$$

Доказательство. Прежде всего докажем, что многообразие

$k_2[\tau] \vee \mathcal{L}_2$, $k_2[\tau] \vee \mathcal{L}_2$, $k_2[\tau] \vee k_2[6]$ ($\tau \neq 6$) — почти цепные. Нам достаточно проверить, что ни одно из них не содержит почти-цепного многообразия высоты ≤ 5 . Для многообразий высоты ≤ 3 это очевидно, и остается убедиться, что ни одно из указанных многообразий не содержит многообразия $\mathcal{U}_4$. В самом деле, любое из этих многообразий удовлетворяет либо тождеству (7), либо двойственному тождеству $\alpha(yz) + y(\alpha x) +$

$+z(xz)=0$. Поэтому, если бы v^4 содержалось в одном из них, оно бы также удовлетворяло тождеству (?). Но из (?) и коммутативности следует тождество $3xz=0$, откуда $xz=0$. Последнее тождество не имеет места в v^4 . Противоречие.

Перейдем к вычислению базисов тождеств рассматриваемых многообразий. Докажем, что любое тождество $\{ = 0$, выполненное в многообразии $k_2[\zeta] \vee k_2[\zeta']$ ($\zeta \neq \zeta'$), следует из тождеств $2x = 0$, $xyxz = 0$, (7) и тождества ассоциативности. Для тождеств первой и второй степени это очевидно. Пусть теперь $\{ = 0$ многочлен третьей степени. Тогда тождество $\{ = 0$ можно привести к одному из следующих двух типов:

$$(II)' \partial = x_0^2 \partial + x_1 x_2 \partial + x_2^2 \partial + x_3 x_4 \partial + x_4^2 \partial + x_5 x_6 \partial + x_6^2 \partial$$

$$\beta_1 x^2 y + \beta_2 x y x + \beta_3 x x^2 + \gamma_1 y^2 x + \gamma_2 y x y + \gamma_3 x y^2 = 0 \quad (12)$$

Рассмотрим каждый из них отдельно.

Случай I. Тожество $\{ = O$ имеет вид (II). Из (7) с очевидностью следует тождество $x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6 + x_7 x_8 + \dots$. Складывая, если нужно, это тождество с (II), мы можем добиться того, что в (II) остаются не больше трех ненулевых коэффициентов. Случай, когда отличен от нуля только один коэффициент, тривиален. Если от нуля отличны 2 коэффициента, то тождество (II) приводится к виду $x_1 x_2 x_3 = x_{1^2} x_{2^2} x_3$, где $\mathcal{T}$ — неодничная перестановка из B_3 . Если $\mathcal{T}$ — транспозиция, то такое тождество может выполняться лишь в одном из многообразий $k_2[\zeta\zeta]$, $k_2[\zeta\zeta']$ и, следовательно, не выполняется в их композиции. Если же $\mathcal{T}$ четна, то, комбинируя наше тождество с (?), получим тождество $x_1 x_2 = O$, также несправедливое в $k_2[\zeta\zeta] \vee k_2[\zeta\zeta']$. Наконец, если в $\{$ входит 3 ненулевых одночлена, то либо (II) совпадает с (?), либо одно из слагаемых может быть получено из другого транспозицией переменных. В первом случае все ясно, а во втором можно отождествить 2 переменные так, что получится тождество одного из трех типов: $x^2 y = O$, $x y x = O$, $y x^2 = O$. Линеаризуя его по x , получаем уже рассмотренный случай.

Случай 2. Тождество $\xi = 0$ имеет вид (12). Этот случай разобирается аналогично, нужно вместо тождества (7) использовать тождество $\alpha^2 y + \alpha y x + y^2 x = 0$, получающиеся из (7) при $\alpha = \alpha$.

Итак, $k_2[\tau] \vee k_2[\delta] = [\alpha\alpha = 0, \alpha\alpha\alpha\alpha = 0, (\alpha\alpha)\alpha + (\alpha\alpha)\alpha + (\alpha\alpha)\alpha\alpha = 0, (\alpha\alpha)\alpha\alpha = \alpha(\alpha\alpha)]$. Заметим, что правая часть этого равенства не зависит от δ и τ . В частности, все 3 многообразия $k_2[(12)] \vee k_2[(13)]$, $k_2[(12)] \vee k_2[(23)]$, $k_2[(13)] \vee k_2[(23)]$ совпадают между собой.

Теперь покажем, что многообразие $\mathcal{H}_2[\tau]$ задается тождествами $2x = 0$, $xyzt = 0$, $(xy)z + (yz)x + (zx)y = 0$, $(x_1x_2)x_3 = (x_1x_3)x_2$, где τ — транспозиция из S_3 . Как и выше, мы докажем, что произвольное тождество $f = 0$, выполненное в $\mathcal{H}_2[\tau]$, следует из указанной системы тождеств. Ясно, что f можно считать полилинейным многочленом степени 3. Тогда тождество $f = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \alpha_1(x_1)x_1 + \alpha_2(x_2)x_2 + \alpha_3(x_3)x_3 + \alpha_4(x_4)x_4 + \alpha_5(x_5)x_5 + \alpha_6(x_6)x_6 + \\ & + \beta_1(x_1)x_1 + \beta_2(x_2)x_2 + \beta_3(x_3)x_3 + \beta_4(x_4)x_4 + \beta_5(x_5)x_5 + \beta_6(x_6)x_6 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Напомним, что в альтернативном кольце ассоциатор $(xy)z - x(yz)$ является косимметрической функцией переменных x, y и z (см. [4, стр. 49]). Учитывая тождество $2x = 0$, мы получаем, что в $\mathcal{A}_2[\mathcal{C}]$ выполнено тождество

$$(x_1 x_2) x_3 + (x_1 x_{2\overline{3}}) x_{3\overline{3}} = x_1 (x_2 x_3) + x_{1\overline{3}} (x_{2\overline{3}} x_{3\overline{3}}) \quad (I4)$$

для любой $\mathcal{J} \in S_3$. В силу (14) можно считать, что в тождестве (13) от нуля не более одного из коэффициентов β_i . Если хотя бы один из β_i равен 1, то тождество (13) приводится к виду $\alpha_1(\alpha_2\alpha_3) = \sum_{\epsilon \in S_3} \alpha_\epsilon(\alpha_{16}\alpha_{24})\alpha_{16}$. Такое тождество не может выполняться в $\mathcal{A}_2$, так как оно вместе с тождеством $(\alpha_4)^2 = 0$ дает $\alpha(\alpha^2) = 0$. Если же отличны от нуля только коэффициенты при одночленах с левой расстановкой скобок, то можно рассуждать так же, как в случае 1 при вычислении базиса тождеств многообразия $\mathcal{A}_2$.

Двойственными вычислениями находится базис тождеств многообразия $\mathcal{H}'_2[\tau]$. Предложение доказано.

Объединяя предложения 3-7, мы получаем основной результат данной работы.

Теорема. Многообразия $\mathcal{O}_{pq} (p \neq q)$, $\mathcal{S}_{pq} (p \neq q)$, $\mathcal{Y}_{pq} (p \neq q)$, $\mathcal{L}_{pq}^{q^2} (q \neq 2)$, $\mathcal{L}_{p^2}^3 (p \geq 2)$, $\mathcal{M}_{p^2}^3 (p \geq 2)$, $\mathcal{H}_3$, $\mathcal{H}_3^a (\alpha = 1, 2)$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{M}_2[\mathcal{C}]$, $\mathcal{M}_2'[\mathcal{C}]$ ($p, q, 2$ — простые числа, $\mathcal{C}$ — транспозиция из S_3) и только они являются почти цепными многообразиями алгебр на n -ых кодах.

Авторы благодарят профессора Л. Н. Шеврина за руководство работой.

Литература

1. Артамонов В.А. Решетки многообразий линейных алгебр. - Успехи матем. наук, 1978, т. 33, № 2, с. 135-167.
2. Дэвов И.В. О многообразиях ассоциативных колец. I. - Алгебра и логика, 1973, т. 12, № 3, с. 269-297.
3. Мекей А. Почти минимальные многообразия ассоциативных колец. - XIV Всесоюз. алгебр. конф. тез. сообщ. Новосибирск, 1977, ч. 2, с. 60-61.
4. Жевлаков К.А., Слинъко А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным. М., 1978.
5. Artamonov V.A. On chain varieties of linear algebras. - Trans. Amer. Math. Soc., 1976, v. 241, N 2, p. 323-328.
6. Tarski A. Equationally complete rings and relation algebras. - Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A, 1956, v. 59, N 1, p. 39-46.
7. Sundaraman T.R. Precomplete varieties of R-algebras. - Algebra Univers., 1975, v. 5, N 3, p. 397-405.
8. Sundaraman T.R. Lattice of precomplete varieties of rings. - Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A, 1975, v. 78, N 2, p. 144-148.

Поступила 27. II. 78